BnB method (Branch & Bound method)

Metoda grananja i ograničavanja (BnC)

BnB metoda predstavlja jednu vrstu metode pretraživanja i koristi se za rešavanje problema optimizacije kod koga je skup pretraživanja konačan. Ideja metode je da se problemi razlože na jednostavnije potprobleme i da se mnogi od ovih potproblema ni ne rešavaju ako se proceni da nemaju bolje rešenje od trenutno najboljeg rešenja. Do trenutno najboljeg rešenja može se doći neposrednom proverom ili nekim heurističkim postupcima u toku algoritma.

Algoritam BnB

Korak1: Podeliti problem na nekoliko potproblema
Korak2: Izračunati LP relaksaciju potproblema:

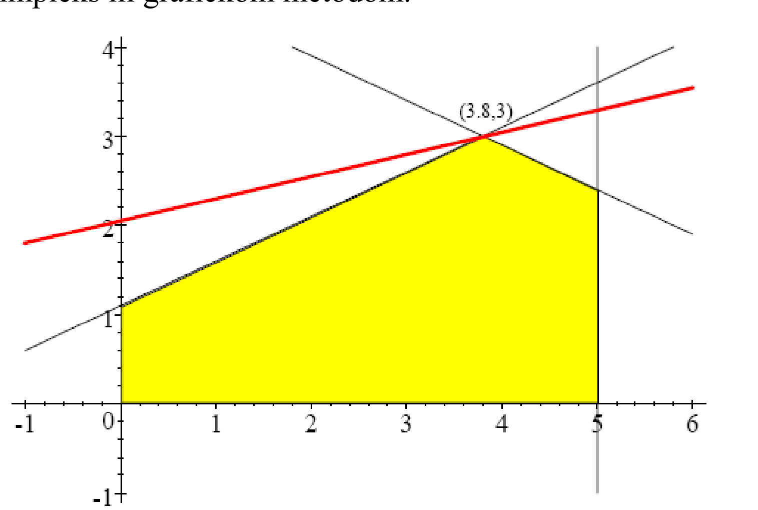
- ako LP problem nema dopustivog rešenja, kraj
- ako LP problem ima dopustivog celobrojnog rešenja, kraj. Uporediti optimalno rešenje sa do sada najboljim poznatim rešenjem.
- Ako LP problem ima optimalno rešenje lošije od onog čija je on relaksacija, kraj. Kažemo da je taj potproblem pretražen u dubinu.
- Ako LP problem ima optimalno rešenje koje nije celobrojno, ali je bolje od rešenja koje problema čija je on relaksacija, tada problem podeliti na nove potprobleme i nastaviti sa računom.

Primer 1

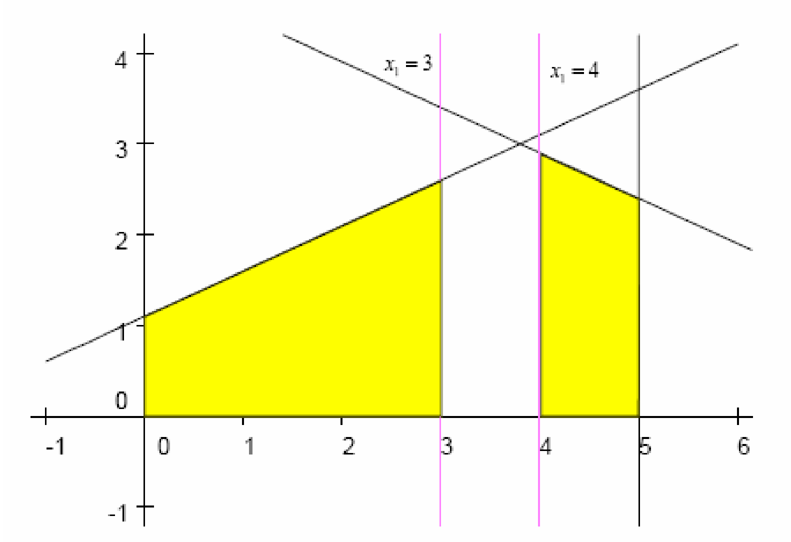
Rešavamo problem:

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + 4x_2 \\ & -10x_1 + 20x_2 \le 22 \\ & 5x_1 + 10x_2 \le 49 \\ & x_1 \le 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Problem možemo rešavati simpleks ili grafičkom metodom.



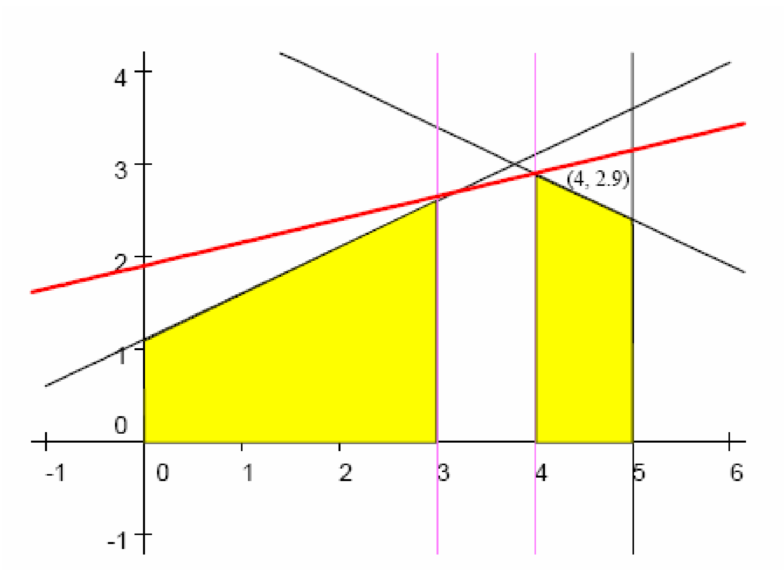
Rešenje datog problema je $(x_1, x_2) = (3.8, 3)$, $f_{\max} = 8.2$. Obzirom da rešenje nije celobrojno, posmatramo dve relaksacije: $x_1 \geq 4$, $x_1 \leq 3$



Relaksacija problema je

$$\begin{aligned} max \quad & -x_1 + 4x_2 \\ & -10x_1 + 20x_2 \leq 22 \\ & 5x_1 + 10x_2 \leq 49 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

I ima optimalno rešenje $(x_1, x_2) = (4, 2.9)$, $f_{\max} = 7.6$



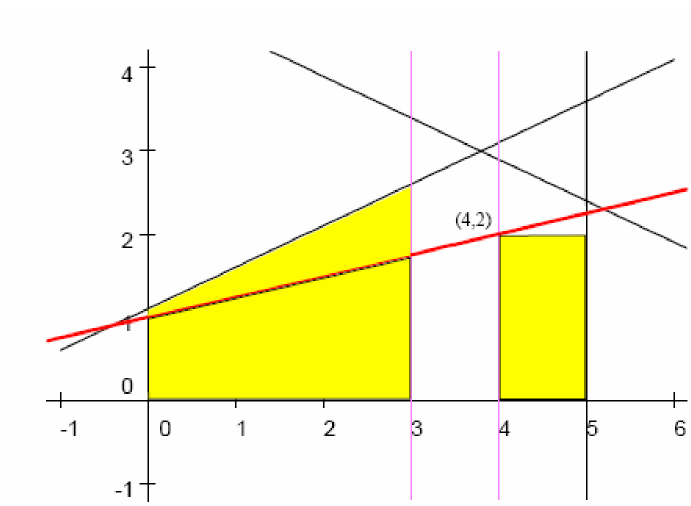
Rešenje nije celobrojno, pa pravimo novu relaksaciju za drugu koordinatu:

$$\max \quad -x_1 + 4x_2$$
$$-10x_1 + 20x_2 \le 22$$
$$5x_1 + 10x_2 \le 49$$
$$4 \le x_1 \le 5$$
$$x_2 \ge 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Medjutim, ova relaksacija nema dopustivo rešenje ($5x_1 + 10x_2 \ge 50$) tako da ovaj potrpoblem više ne posmatramo.

Linearna relaksacija

$$\max \quad -x_1 + 4x_2$$
$$-10x_1 + 20x_2 \le 22$$
$$5x_1 + 10x_2 \le 49$$
$$4 \le x_1 \le 5$$
$$0 \le x_2 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

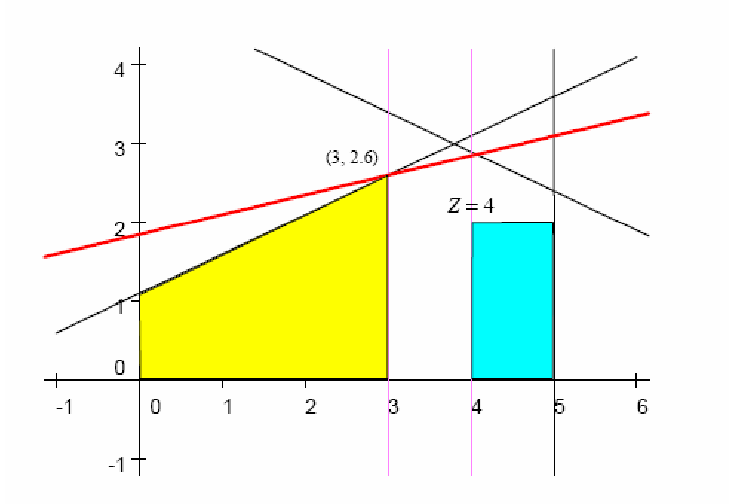


Rešavamo, grafičkom metodom i dobijamo da je optimalno rešenje $(x_1, x_2) = (4, 2)$, $f_{\max} = 7$. Ovo rešenje je ujedno (za sada) i optimalno rešenje.

Vraćamo se na početnu podelu, i rešavamo problem:

$$\max \quad -x_1 + 4x_2$$
$$-10x_1 + 20x_2 \le 22$$
$$5x_1 + 10x_2 \le 49$$
$$0 \le x_1 \le 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Koja ima rešenje $(x_1, x_2) = (3, 2.6)$, $f_{\max} = 7.4$.



Daljim grananjem, dobijamo ograničenja $x_2 \le 2,\ x_2 \ge 3$.

Posmatramo relaksacije ovog problema:

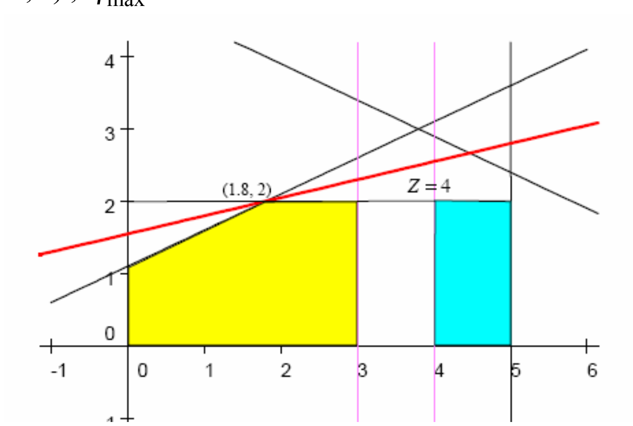
$$\begin{aligned} max \quad & -x_1 + 4x_2 \\ & -10x_1 + 20x_2 \le 22 \\ & 5x_1 + 10x_2 \le 49 \\ & x_1 \le 3 \\ & x_2 \ge 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Ova relaksacija nema dopustivo rešenje ($-10x_1 + 20x_2 \ge 30$) tako da ovaj potrpoblem više ne posmatramo.

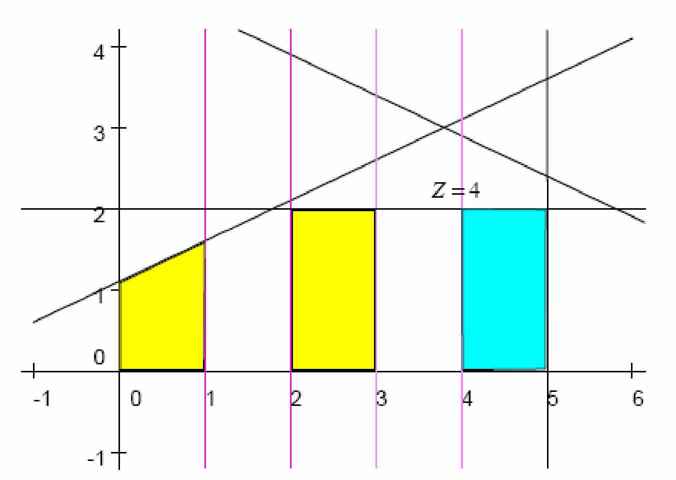
Druga linearna relaksacija je

$$\begin{aligned} max \quad & -x_1 + 4x_2 \\ & -10x_1 + 20x_2 \le 22 \\ & 5x_1 + 10x_2 \le 49 \\ & 0 \le x_1 \le 3 \\ & 0 \le x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Koja ima rešenje $(x_1, x_2) = (1.8, 2)$, $f_{\max} = 6.2$.



Daljim grananjem dobijamo nova dva uslova: $x_1 \geq 2$, $x_1 \leq 1$



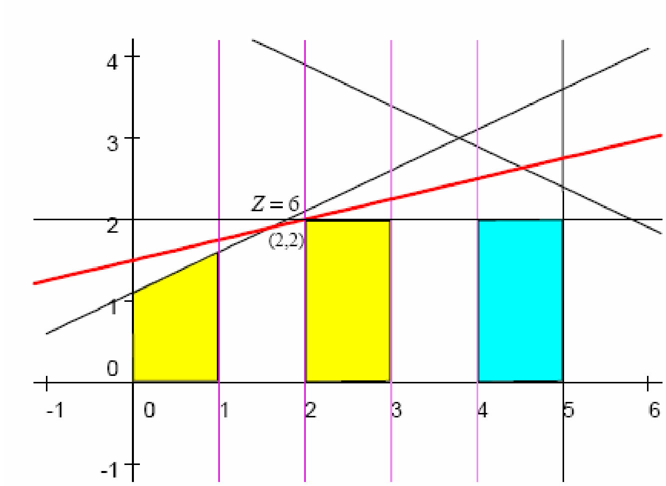
Nova linearna relaksacija je

$$
\begin{aligned}
max \quad & -x_1 + 4x_2 \\
& -10x_1 + 20x_2 \leq 22 \\
& 5x_1 + 10x_2 \leq 49 \\
& 2 \leq x_1 \leq 3 \\
& 0 \leq x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Koja ima rešenje $(x_1, x_2) = (2, 2)$, $f_{\max} = 6$ .Ovo rešenje je bolje od prethodnog.
Druga relaksacija daje problem

$$
\begin{aligned}
max \quad & -x_1 + 4x_2 \\
& -10x_1 + 20x_2 \leq 22 \\
& 5x_1 + 10x_2 \leq 49 \\
& 0 \leq x_1 \leq 1 \\
& 0 \leq x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Čije rešenje je $(x_1, x_2) = (1, 1.6)$, $f_{\max} = 5.4$.



Kako je ovo rešenje lošije od do sada postignutog, nećemo dalje relaksirati problem.

Primer 2

Rešavamo problem:

$$\begin{aligned} max\ \ & 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 10 \\ & -x_3 + x_4 \le 1 \\ & -x_1 + x_3 \le 0 \\ & -x_2 + x_4 \le 0 \\ & x_i = \{0,1\} \end{aligned}$$

Rešenje datog problema je (5/6,1,0,1), z=16.5. Rešenje je necelobrojno, razlikujemo sledeće slučajeve; $x_1 = 0$ i $x_1 = 1$

1) $x_1 = 0$

Početni problem dobija sledeći oblik ($x_3 = 0$ zbog uslova $-x_1 + x_3 \le 0$):

$$\begin{aligned} max\ \ & 5x_2 + 4x_4 \\ & 3x_2 + 2x_4 \le 10 \\ & -x_2 + x_4 \le 0 \\ & x_4 \le 1 \\ & x_i = \{0,1\} \end{aligned}$$

Rešenje novog problema je (1,1), z=9 (Trenutno najbolje rešenje!!!)

2) $x_1 = 1$

Početni problem dobija sledeći oblik

$$\begin{aligned} max\ \ & 9 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ & 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 4 \\ & x_3 + x_4 \le 1 \\ & -x_2 + x_4 \le 0 \\ & x_i \le 1, i = 2,3,4 \\ & x_i = \{0,1\} \end{aligned}$$

Rešenje novog problema je (1,0.8,0,0.8), z =16.2 (Nije celobrojno, zato ovo rešenje dalje granamo)

2.1) $x_1 = 1,\ x_2 = 0$

Poslednji problem dobija oblik ($x_4 = 0$ zbog uslova $-x_2 + x_4 \le 0$)

$$\begin{aligned} max\ \ & 9 + 6x_3 \\ & 5x_3 \le 4 \\ & x_3 \le 1 \\ & x_i = \{0,1\} \end{aligned}$$

Rešenje novog problema je (1,0,0.8,0), z =13.8 (Nije celobrojno, zato ovo rešenje dalje granamo)

2.1.1) $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$

Rešenje 2.1.1 potproblema je (1,0,0,0), z =9 (Celobrojno ali nije bolje od trenutno najboljeg rešenja)

2.1.2) $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$

Rešenje 2.1.2 nije dopustivo.

2.2) $x_1 = 1,\ \ x_2 = 1$

Posmatramo problem

$$\begin{aligned} max \quad & 14+6x_3 + 4x_4 \\ & 5x_3 + 2x_4 \le 1 \\ & x_3 + x_4 \quad \le 1 \\ & x_4 \quad \le 1 \\ & x_i = \{0,1\} \end{aligned}$$

Rešenje 2.2 potproblema je (1,1,0,0.5), z = 16 (Necelobrojno rešenje, posmatramo relaksaciju)

2.2.1) $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$

Prethodno rešenje je i dalje dopustivo (1,1,0,0.5), još uvek je u trci za optimalno. Granamo poslednju koordinatu.

2.2.1.1) $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$

Rešenje problema je z = 14 (Ovo postaje trenutno najbolje rešenje !!!!)

2.2.1.2) $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1$

Nije dopustivo rešenje

2.2.2.) $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$

Nije dopustivo rešenje.

Dakle, najbolje rešenje je (1,1,0,0) i iznosi Z = 14. Ovo je, ujedno i optimlano rešenje.

Primer 3 (na času)

Rešavamo problem:

$$\begin{aligned} max \quad & 12x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 \\ & 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \le 15 \\ & x_i = \{0,1\} \end{aligned}$$

BnC method (Branch & Cut method)

Metoda grananja i odsecanja (BnC)

BnC metoda je egzaktna metoda za rešavanje problema celobrojnog programiranja. Predstavlja kombinaciju metode odsecanja ravni i BnB algoritma. Ako imamo problem celobrojnog linearnog programiranja i izostavimo uslov celobrojnosti, dobili smo problem linearnog programiranja. Ako je rešenje relaksacionog problema celobrojno, tada je i rešenje početnog problema celobrojno. Ideja metode je u formiranju linearne nejednačine koja će zadovoljavati sva celobrojna dopustiva rešenja početnog problema, dok necelebrojna neće. Takva nejednačina se naziva odsecajućom ravni ili rezom obzirom da eleminiše nezadovoljavajuća rešenja. Najpoznatija metoda odsecanja je Gomorijeva metoda.

Neka je dat sledeći problem celobrojnog programiranja:

$$\begin{aligned} &\max\ c^T x \\ &p.o.\ \ Ax = b \\ &\quad x \geq 0, x_i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Metoda se sastoji iz sledećeg: Problem se prvo relaksira ukidanjem uslva celobrojnosti. Geometrijski, rešenje problema će biti jedna tačka poliedra koji se sastoji iz svih dopustivih rešenja. Ukoliko dobijena tačka nije celobrojna, tada metod nalazi hiperravan koja razdvaja tu tačku od svih dopustivih celobrojnih rešenja. Ova hiperravan je linearna nejendačina koja će eliminisati dobijenu tačku kao rešenje i njenim uključivanjem u ograničenja dobijamo modifikovani linearni problem. Postupak se ponavlja sve dok se ne dobije celobrojno rešenje.
Koristimo Simplex metod, za rešavanje linearnog programiranja, tako što ćemo malo promeniti oblik početne jednačine:

$$x_i + \sum \overline{a}_{i,j} x_j = \overline{b}_i \tag{1}$$

gde je x_i bazična promenljiva, a x_j nebazična promenljiva. Prepišemo jednačinu tako da nam celobrojni delovi budu na levoj a ostaci na desnoj strani:

$$x_i + \sum \lfloor \overline{a}_{i,j} \rfloor x_j - \lfloor \overline{b}_i \rfloor = \overline{b}_i - \lfloor \overline{b}_i \rfloor - \sum \left(\overline{a}_{i,j} - \lfloor \overline{a}_{i,j} \rfloor \right) x_j$$

Za svaku celobrojnu tačku dopustivog skupa desna strana je manja od 1 dok je leva strana celobrojna, čime dobijamo da leva i desna strana imaju rešenje ako su obe manje ili jednake nuli. Dakle,

$$\overline{b}_i - \lfloor \overline{b}_i \rfloor - \sum \left(\overline{a}_{i,j} - \lfloor \overline{a}_{i,j} \rfloor \right) x_j \leq 0$$

Važi za sve celobrojne tačke dopustivog skupa.
Dalje, kako je uslov da x_j bude nenegativno, imamo da je

$$x_i + \sum \lfloor \overline{a}_{i,j} \rfloor x_j \leq \overline{b}_i$$

Kako su x_j celobrojne vrednosti, sledi da je rešenje nejednakosti celobrojno, odnosno

$$x_i + \sum \lfloor \overline{a}_{i,j} \rfloor x_j \leq \lfloor \overline{b}_i \rfloor \tag{2}$$

Sabiranjem nejednakosti (1) i (2) dobijamo:

$$\sum\left(\lfloor \bar{a}_{i,j} \rfloor - \bar{a}_{i,j}\right)x_j \leq \lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i$$

Dodavanjem nove, izravnajuće promenljive x_{n+1} (celobrojno) dobijamo jednakost:

$$\sum\left(\lfloor \bar{a}_{i,j} \rfloor - \bar{a}_{i,j}\right)x_j + x_{n+1} = \lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i$$

koju dodajemo početnom problemu.

Algoritam Gomorijeve metode:

Korak1. Posmatrati nultu vrstu odgovarajuće simplex tablice i u njoj odrediti *i* za koje je $\bar{b}_i$ maksimalno.

Korak2. Napraviti rez

$$\sum\left(\lfloor \bar{a}_{i,j} \rfloor - \bar{a}_{i,j}\right)x_j + x_{n+1} = \lfloor \bar{b}_i \rfloor - \bar{b}_i$$

i dodati ga na kraj tabele.

Korak3. Primenom dualnog simplex algoritma naći rešenje problema tako što se pivot bira na sledeći način:

a) Početi sa kolonama $j=1,\ldots,n+1$ kod kojih je lex pozitivan

b) Izabrati bilo koju kolonu *l* gde je $b_l < 0$ kao pivot vrstu. Za pivot kolonu odrediti kolonu *j* takvu da je

$$\underset{j:a_{lj}<0}{lex-\max}\left[\frac{1}{a_{lj}}B^{-1}A_j\right]$$

Primer1.

Rešavamo problem:

$$\min \quad -x_1 - x_2$$
$$2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5$$
$$3x_2 + 3x_3 - x_4 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Prvo, izostavimo uslov celobrojnosti i problem rešavamo simplex metodom.

	-1	-1	0	0
5	2	-2	-3	2
3	0	3	3	-1

2.5	0	-2	-1.5	1
2.5	1	-1	-1.5	1
3	0	3	3	-1

4.5	0	0	0.5	0.3333
3.5	1	0	-0.5	0.6667
1	0	1	1	-0.3333

Dobijeno rešenje je $x_1 = 3.5,\ x_2 = 1,\ x_3 = x_4 = 0\ \ f_{\min} = -4.5$

Prva koordinata rešenja problema nije celobrojna, zato primenjujemo Gomorijev rez:

$$\frac{1}{2}x_3 + \frac{2}{3}x_4 = \frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad x_3 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 - \frac{1}{3}x_4 = 4 - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 + x_4 - 4 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - x_5 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + x_5 = -\frac{1}{2}$$

9/2	0	0	1/2	1/3	0.0000
7/2	1	0	-1/2	2/3	0
1	0	1	1	-1/3	0
-1/2	0	0	-1/2	-1/3	1

Dobijena tablica je dualna simplex tablica. Tražimo pivot po 2b) pravilu, odnosno imamo da je

$$\frac{(1/2, -1/2, 1)}{-(-1/2)} \overset{lex}{<} \frac{(1/3, 2/3, -1/3)}{-(-1/3)}$$, pa je pivot -1/2.

4	0	0	0	0	1
4	1	0	0	1.0000	-1
0	0	1	0	-1.0000	2
1	0	0	1	0.6667	-2

Dobijeno rešenje je celobrojno, pa je samim timo ovo i rešenje početnog problema

$$x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1, x_4 = 0\ \ f_{\min} = 4$$

Primer2.

Rešavamo problem:

$$\max \quad x_1 - 2x_2$$
$$-4x_1 + 6x_2 \le 9$$
$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0, x_i \in \mathbb{Z}$$

Dodajemo izjednačavajuće promenljive x_3 i x_4.Rešavamo simplex problem

	x1	x2	x3	x4
0	1	-2	0	0
9	-4	6	1	0
4	1	1	0	1

	x1	x2	x3	x4
3	-0.33333	0	0.333333	0
1.5	-0.6667	1	0.1667	0
2.5	1.6667	0	-0.1667	1

	x1	x2	x3	x4
3.5	0	0	0.3	0.2
2.5	0.0000	1	0.1000	0.4
2.5	1.0000	0	-0.1000	0.6

Simplex metodom dobijamo rešenje *x=(3/2,5/2,0,0,)* koje nije celobrojno. Primenjujemo Gomorijev rez:

$$x_2 + \frac{1}{10}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = \frac{5}{2}$$
$$x_2 - 2 = -\frac{1}{10}x_3 - \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{2} \le 0$$

Uvođenjem izravnajuće promenljive x_5 dobijamo jednakost $-\frac{1}{10}x_3 - \frac{2}{5}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}$

Pa rešavamo novi simplex problem:

	x1	x2	x3	x4	x5
3.5	0	0	0.3	0.2	0
2.5	0.0000	1	0.1000	0.4	0
1.5000	1.0000	0	-0.1000	0.6	0
-0.5	0.0000	0	-0.1000	-0.4	1.0000

	x1	x2	x3	x4	x5
3.25	0	0	0.25	0	0.5
2	0.0000	1	0.0000	0	1
0.7500	1.0000	0	-0.2500	0	1.5
1.25	0.0000	0	0.2500	1	-2.5000

Dobili smo optimalno rešenje *x=(3/4,2)*. Kako ni ovo rešenje nije celobrojno, nastavljamo sa Gomirijevim odsecanjem:

$$x_1 - x_3 + x_5 = -\frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{4} \le 0$$

Pa je nova tablica oblika:

	x1	x2	x3	x4	x5	X6
3.25	0	0	0.25	0	0.5	0
2	0.0000	1	0.0000	0	1	0
0.7500	1.0000	0	-0.2500	0	1.5	0
1.2500	0.0000	0	0.2500	1.0000	-0.25	0
-0.75	0.0000	0	-0.7500	0	-0.5000	1.0000

	x1	x2	x3	x4	x5	X6
3	0	0	0	0	0.333333	0.333333
2	0.0000	1	0.0000	0	1	0
1.0000	1.0000	0	0.0000	0	1.666667	-0.33333
1.0000	0.0000	0	0.0000	1.0000	-2.66667	0.333333
1	0.0000	0	1.0000	0	0.6667	-1.3333

Odnosno rešenje problema je *x=(1,2)*

Primer3

Rešavamo problem:

$$\max \quad 4x_1 - x_2$$

$$7x_1 - 2x_2 \le 14$$

$$x_2 \le 3$$

$$2x_1 - 2x_2 \le 3$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Rešavamo relaksacioni problem Simplex metodom. Dobijamo sledeće rešenje:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 \quad &= \frac{20}{7} \\ x_2 \quad + x_4 \quad &= 3 \\ -\frac{2}{7}x_3 + \frac{10}{7}x_4 + x_5 &= \frac{23}{7} \end{aligned}$$

Pravimo rez prve vrste: $\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 = \frac{20}{7} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 = 2 + \frac{6}{7} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 \ge \frac{6}{7}$

Dodajemo izravnajuću promenljivu, x_6 i rešavamo novu simplex tablicu. Dobijeno rešenje biće sledećeg oblika:

	X1	x2	x3	x4	x5	x6
-15/2	0	0	0	0	1/2	3
2	1	0	0	0	0	1
1/2	0	1	0	0	-1/2	1
1	0	0	1	0	-1	-5
5/2	0	0	0	1	1/2	6

Novi rez: $\frac{1}{2}x_5 \ge \frac{1}{2}$.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
-7	0	0	0	0	0	3	1
2	1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	-1
2	0	0	1	0	0	-5	-2
2	0	0	0	1	0	6	1
1	0	0	0	0	1	0	-1

Optimalno rešenje, *x*=(2,1).*

Primer4.

Rešavamo problem:

$$\min \quad -6x_1 - 5x_2$$
$$3x_1 + x_2 \leq 11$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Prvo, izostavimo uslov celobrojnosti i problem rešavamo simplex metodom.
Uvodimo izravnajuće promenljive, $x_3, x_4 \geq 0$.

$$\min \quad -6x_1 - 5x_2$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 11$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

	-6	-5	0	0
11	3	1	1	0
5	-1	2	0	1

22	0	-3	2	0
3.666667	1	0.333333	0.333333	0
8.666667	0	2.333333	0.333333	1

33.14286	0	0	2.428571	1.285714
2.428571	1	0	0.285714	-0.14286
3.714286	0	1	0.142857	0.428571

Dobijeno rešenje simplex metodom je

$$x_1 = 2.428571 = 2\frac{3}{7}, \qquad x_2 = 3.714286 = 3\frac{5}{7}, \qquad x_3 = 0, x_4 = 0 \qquad f_{\min} = 33.14286 = -33\frac{1}{7}$$

Primenjujemo metodu ograničavanja. Ograničićemo promenljivu x_1, pa ćemo početnom poblemu dodati jedan od sledeća dva uslova:

$$x_1 \leq 3$$
$$x_1 \geq 2$$

Odnosno rešavamo dva nova problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & -6x_1 - 5x_2 \\ & 3x_1 + x_2 \le 11 \\ & -x_1 + 2x_2 \le 5 \\ & x_1 \ge 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \min \quad & -6x_1 - 5x_2 \\ & 3x_1 + x_2 \le 11 \\ & -x_1 + 2x_2 \le 5 \\ & x_1 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Optimalno rešenje prvog problema biće $(x_1, x_2) = (3,2)$ $f_{\min} = -28$ dok je optimalno rešenje drugog problema $(x_1, x_2) = (2, 2.5)$, $f_{\min} = -29.5$. Kako rešenje drugog problema nije celobrojno, ponovo uvodimo rez, tako što dodajemo nejednakost koja zadovoljava sva rešenja dopustivog skupa i istovremeno odbacuje necelebrojno rešenje $(x_1, x_2) = (2, 2.5)$. Npr. dodajemo jednačinu: $2x_1 + x_2 \le 7$.

Rešavamo novi problem:

$$\begin{aligned} \min \quad & -6x_1 - 5x_2 \\ & 3x_1 + x_2 \le 11 \\ & -x_1 + 2x_2 \le 5 \\ & x_1 \le 2 \\ & 2x_1 + x_2 \le 7 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Rešenje dobijenog problema biće tačka $(x_1, x_2) = (1.8, 3.4)$, $f_{\min} = -27.8$. Optimalno rešenje trećeg problema je veće od optimalnog rešenja prve relaksacije, pa samim tim za ovaj potproblem nećemo tražiti nove rezove obzirom da bi svaki novi rez dobijao lošija rešenja. Rešenje prve relaksacije smatramo rešenjem problema.